ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali a un numero reale a non nullo.
Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche $(x; y)$:

a) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a;

b) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x; y)$ che soddisfano al problema;

c) si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;

d) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;

e) si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

PROBLEMA 1

a) Tenendo conto che il parametro a non è nullo, le relazioni assegnate dal testo sono:

$$x+y=a \text{ e } \frac{x}{y}=a, \text{ con } x, y \neq 0.$$

$x+y=a \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$ è l'equazione di un fascio improprio di rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante esclusa la retta $y=x$, perché $a\neq 0$.
$\frac{x}{y}=a \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$ cioè $y=\frac{1}{a}x \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$ rappresenta un fascio proprio di rette con centro $(0;0)$, esclusi il punto $(0;0)$ stesso e gli assi cartesiani.
Per quanto detto, confrontando le due equazioni, si deduce che le rette che rappresentano non coincidono per nessun valore di $a\neq 0$, mentre sono parallele per $a=-1$.
Pertanto per $a\neq 0 \wedge a\neq -1$, esse si intersecano in un solo punto.
Si può arrivare alle stesse conclusioni valutando il sistema:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-ay=0 \end{cases}, \text{ con } a\neq 0 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0.$$

Con il metodo di Cramer si trova $\Delta=-a-1$, $\Delta_x=-a^2$, $\Delta_y=-a$. Quindi se $a=-1$ non ci sono soluzioni; se $a\neq -1$ esiste la soluzione $\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{a+1} \\ y=\dfrac{a}{a+1} \end{cases}$.

b) Dal sistema $\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=a \end{cases}$, con $a\neq 0 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$, eliminando a, segue l'equazione cartesiana del luogo γ in forma implicita:

$$x+y=\frac{x}{y} \rightarrow y^2+xy-x=0.$$

c) Le equazioni della simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante sono: $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$. La trasformata dell'equazione $x=y^2+xy-x=0$, $y\neq 1 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$ diventa: $x^2+xy-y=0$, ossia in forma esplicita

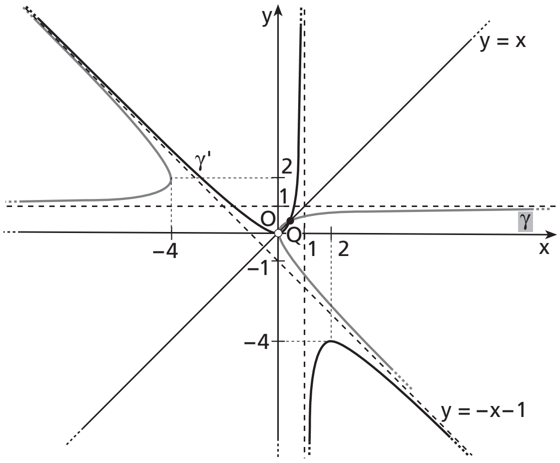
$$\gamma' : y=\frac{x^2}{1-x}, \; x\neq 1 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0.$$

Si sceglie di studiare dettagliatamente γ' in modo da costruire il grafico di γ per simmetria. Si indichi per comodità con f la funzione della curva γ'.
Il campo di esistenza f è $x\neq 1 \wedge x\neq 0$. La funzione non è né pari né dispari. L'intersezione di $y=\frac{x^2}{1-x}$ con gli assi cartesiani è $(0;\,0)$ non accettabile per le C.E.. La funzione è positiva per $x<1 \wedge x\neq 0$, è nega-

tiva per $x > 1$. I limiti agli estremi del campo di esistenza valgono: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-x} = 0$, quindi $x = 0$ è un punto di discontinuità di terza specie; $\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{x^2}{1-x} = \mp\infty$, $x = 1$ è un asintoto verticale; $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x} = \mp\infty$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-x^2} = -1$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right) = -1$, pertanto la funzione ha asintoto obliquo $y = -x-1$.

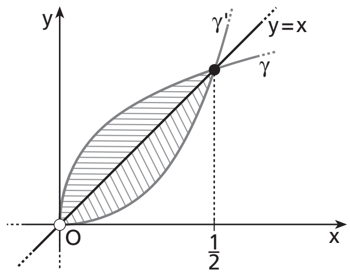
Lo studio del segno della derivata prima $f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$ implica che la funzione avrebbe un minimo in $x = 0$, se tale punto non fosse escluso dal campo di esistenza, e ha un massimo in $(2; -4)$. Valutando il segno della derivata seconda $f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$ si deduce che la concavità è rivolta verso l'alto per $x < 1$, verso il basso per $x > 1$. Nella figura 1 sono tracciati i grafici di f e della sua simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



▲ **Figura 1.**

d) Poiché γ e γ′ sono due curve simmetriche rispetto alla retta $y = x$, esse devono intersecarsi in punti appartenenti alla retta stessa. Pertanto si determinano tali punti ponendo a sistema l'equazione della curva γ′ e l'equazione della bisettrice:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{1-x} \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$



▲ **Figura 2.**

I due punti comuni a γ e γ′ sono $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $O(0,0)$.

Grazie alla simmetria, il calcolo dell'area S, compresa tra le curve γ e γ′, si riconduce al calcolo della superficie compresa tra γ′ e la retta $y = x$, raddoppiandone poi il risultato.

$$S = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^2}{1-x}\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{x^2-1+1}{x-1}\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = 2\left[x^2+x+\ln|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}-2\ln 2.$$

Si può determinare la superficie S per via numerica calcolando l'integrale $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^2}{1-x}\right)dx$ attraverso il metodo dei trapezi. Si divide l'intervallo $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ in 10 parti uguali e si compila la corrispondente tabella.

x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,40	0,45	0,5
$x-\frac{x^2}{1-x}$	0	0,0474	0,0889	0,1235	0,15	0,1667	0,1714	0,1615	0,1333	0,08182	0

Per la formula dei trapezi vale:

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^2}{1-x}\right)dx \simeq 2\,\frac{\frac{1}{2}-0}{10}\left(\frac{0+0}{2}+0{,}0474+0{,}0889+\ldots+0{,}0818\right)=0{,}112452.$$

Si osserva che l'integrale esatto ha valore $\frac{3}{2}-2\ln 2$ che, determinato con la calcolatrice, risulta uguale a 0,1137… .
Pertanto il valore approssimato ottenuto con il metodo dei trapezi è certo fino alla cifra dei centesimi.

e) Se $x=1$, la relazione $x+y=\frac{x}{y}$ diventa $1+y=\frac{1}{y}$ cioè $y^2+y-1=0$. Ricavando y si trova: $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Si osserva che la relazione $1+y=\frac{1}{y}$ può essere scritta in forma di proporzione cioè $1 : y=(1+y) : 1$.
Applicando la proprietà dello scomporre si ottiene $(1-y) : y=y : 1$ dove y rappresenta il medio proporzionale fra 1 e quanto rimane togliendo la stessa quantità da 1. La soluzione positiva $y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ rappresenta, per definizione, la parte aurea dell'unità, mentre, il numero 1 è la parte aurea di $\left|\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right|$ che è il valore assoluto della soluzione negativa.