ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{f(x)}\,dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\dfrac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

PROBLEMA 1

1. Studiamo la derivata di $g(x)$:

$$g'(x) = a^x \ln a - a^{-x} \ln a = \ln a(a^x - a^{-x}) = \ln a \frac{a^{2x}-1}{a^x}.$$

Poiché a^x è sempre positivo, $g'(x) > 0$ se vale $\ln a(a^{2x}-1) > 0$.
Se $a > 1$, allora $\ln a > 0$ e, quindi, otteniamo:

$$g'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad a^{2x} - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad a^{2x} > 1 \quad \rightarrow \quad 2x > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0.$$

Se, invece, $0 < a < 1$, allora $\ln a < 0$ e, quindi, otteniamo:

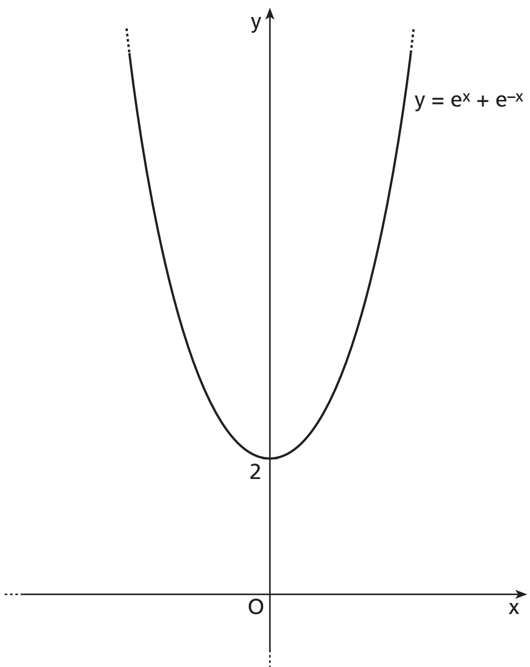
$$g'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad a^{2x} - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad a^{2x} < 1 \quad \rightarrow \quad 2x > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0.$$

Dunque, in entrambi i casi la derivata è strettamente positiva per $x > 0$ e strettamente negativa per $x < 0$.
In conclusione g è strettamente crescente per x positiva e strettamente decrescente per x negativa.

2. Il dominio della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ è $\mathbb{R}$.
Essa è una funzione pari ed interseca l'asse y nel punto di ordinata 2, mentre non interseca l'asse x. Inoltre è sempre positiva.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette asintoti obliqui.
Dal punto precedente sappiamo che la derivata $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$ è positiva per $x > 0$, nulla per $x = 0$ e negativa altrove.
Inoltre $f''(x) = e^x + e^{-x}$, ed è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.
La funzione ha, quindi, la concavità rivolta sempre verso l'alto. Il grafico di f è in figura 1.



▲ **Figura 1.**

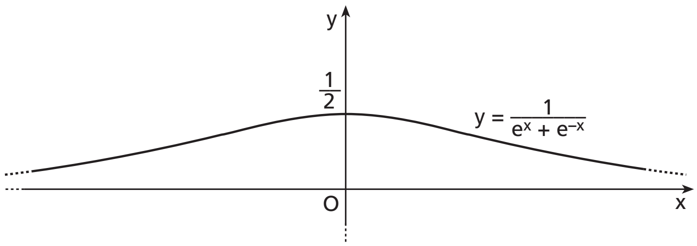
Consideriamo ora $h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Anch'essa è definita in tutto $\mathbb{R}$ e sempre strettamente positiva. Interseca l'asse y nel punto $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

quindi l'asse x è asintoto orizzontale. Inoltre, essendo $h(x) = \frac{1}{f(x)}$, vale che h è decrescente dove f è crescente e viceversa.

Il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$ è, dunque, il seguente (figura 2).



◀ **Figura 2.**

3. Effettuando la sostituzione $m = e^x$, si ottiene

$$\int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^{e^t} \frac{1}{m^2+1}\,dm = [\text{arctg}\, m]_1^{e^t} = \text{arctg}\, e^t - \frac{\pi}{4}.$$

Quindi,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\text{arctg}\, e^t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Tale valore rappresenta l'area del sottografico della funzione positiva $h(x)$ per $x > 0$. Tale area risulta finita anche se tale regione è illimitata.

4. Si osservi che:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\text{arctg}\, x]_0^1 = (\text{arctg}\, 1 - \text{arctg}\, 0) = \frac{\pi}{4}.$$

Per il calcolo approssimato di $\dfrac{\pi}{4}$ si può, quindi, utilizzare il metodo dei rettangoli, dividendo l'intervallo $[0; 1]$ in $n = 6$ parti uguali. Considerando $k(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, e tenendo conto che questa è una funzione monotona decrescente per $x > 0$, si ottengono le seguenti approssimazioni per eccesso e per difetto.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq \frac{1-0}{6}\left[k(0) + k\left(\frac{1}{6}\right) + k\left(\frac{2}{6}\right) + k\left(\frac{3}{6}\right) + k\left(\frac{4}{6}\right) + k\left(\frac{5}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \frac{36}{37} + \frac{36}{40} + \frac{36}{45} + \frac{36}{52} + \frac{36}{61}\right] \simeq 0{,}83.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq \frac{1-0}{6}\left[k\left(\frac{1}{6}\right) + k\left(\frac{2}{6}\right) + k\left(\frac{3}{6}\right) + k\left(\frac{4}{6}\right) + k\left(\frac{5}{6}\right) + k(1)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{36}{37} + \frac{36}{40} + \frac{36}{45} + \frac{36}{52} + \frac{36}{61} + \frac{1}{2}\right] \simeq 0{,}75.$$

L'errore commesso nell'approssimazione è $\varepsilon = 0{,}83 - 0{,}75$ che è anche uguale a $\dfrac{1}{6}(k(0) - k(1)) \simeq 0{,}08$. Aumentando il numero n si può migliorare l'approssimazione.