

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008**

■ **PROBLEMA 1**

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A(1; 0)$, $B(3; 0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$.

1. Si provi che i punti $(1; 2)$ e $\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$.
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C , dall'ortocentro del triangolo ABC . Si tracci γ .
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B .
4. Verificato che $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$, si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008

PROBLEMA 1

1. In un sistema cartesiano si considerano i punti $A(1; 0)$, $B(3; 0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y=2x$. I punti C del piano che formano angoli $\hat{ACB} = \frac{\pi}{4}$ stanno su due circonferenze, \mathcal{C} e \mathcal{C}_1 , passanti per A e B , di centri D e D_1 , tali che l'angolo al centro $\hat{ADB} = \hat{AD_1B} = \frac{\pi}{2}$ (figura 1).

Considerata la circonferenza \mathcal{C}' di diametro AB ed equazione $(x-2)^2 + y^2 = 1$, e l'asse r del segmento AB , i punti D e D_1 risultano intersezione tra tale circonferenza e l'asse. Risolvendo il corrispondente sistema

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

si ottiene $D(2; 1)$ e $D_1(2; -1)$.

I raggi delle circonferenze \mathcal{C} e \mathcal{C}_1 risultano pertanto $DA = D_1A = \sqrt{2}$.

Le equazioni delle due circonferenze sono quindi:

$$\mathcal{C}: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2,$$

$$\mathcal{C}_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2.$$

Mentre la circonferenza \mathcal{C}_1 non interseca la retta $y=2x$, la circonferenza \mathcal{C} interseca tale retta nei punti di coordinate soddisfacenti il sistema:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow C_1 \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \wedge C_2 \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

2. Esprimiamo il punto C in coordinate parametriche: $C(t; 2t)$, con $t \neq 0$ (per $t=0$ il triangolo ABC è degenere). Poiché in un triangolo l'ortocentro è l'intersezione delle altezze, troviamo le equazioni delle altezze relative ai lati BC e AB che hanno equazioni, rispettivamente:

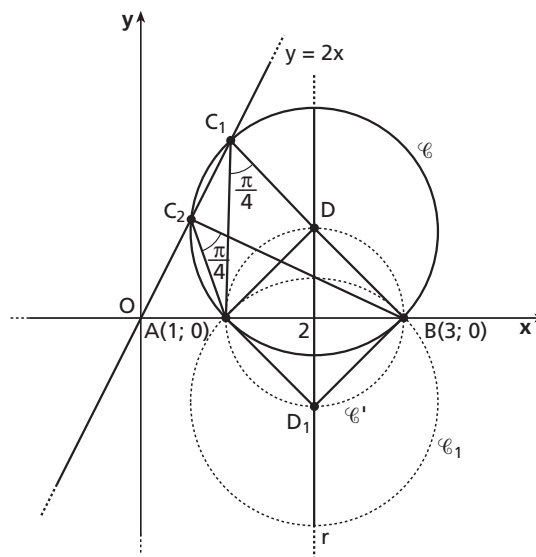
$$y = \frac{3-t}{2t}(x-1) \text{ e } x = t.$$

Otteniamo quindi il generico ortocentro risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{3-t}{2t}(x-1) \\ x = t \end{cases}$$

Eliminando il parametro si ottiene l'equazione cartesiana di γ , luogo geometrico dell'ortocentro, ossia:

$$y = \frac{3-x}{2x}(x-1) \rightarrow y = \frac{-x^2 + 4x - 3}{2x}.$$



▲ Figura 1.

Indicata con $f(x)$ tale funzione, essa è definita nel campo reale per $x \neq 0$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono i punti $A(1; 0)$, $B(3; 0)$. Per il segno della funzione, nella figura 2 è riportato il quadro dei segni.

La curva presenta un asintoto verticale di equazione $x=0$ e un asintoto obliquo, che si ottiene calcolando i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + 4x - 3}{2x} = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + 4x - 3}{2x^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^2 + 4x - 3}{2x} + \frac{x}{2} \right) = 2.$$

L'equazione dell'asintoto obliquo è dunque $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno (figura 3):

$$f'(x) = \frac{2x(-2x+4) - 2(-x^2+4x-3)}{4x^2} = \frac{-x^2+3}{2x^2}.$$

Esistono un punto di minimo relativo $N(-\sqrt{3}; \sqrt{3}+2)$ e un punto di massimo relativo $M(\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$.

Nella figura 4 è rappresentato il grafico γ della funzione $f(x)$.

3. Determiniamo le equazioni delle tangenti a γ in A e B .

La tangente in A è la retta per A con coefficiente angolare $f'(x_A) = f'(1) = 1$: la sua equazione è $y = x - 1$.

In modo analogo si trova $f'(x_B) = f'(3) = -\frac{1}{3}$ e la

retta tangente a γ in B è la retta di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 1$. Tali rette si intersecano nel punto P ,

soluzione del sistema:

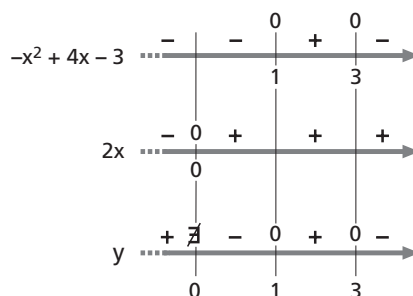
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nella figura 5 è evidenziata l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti alla curva nei punti A e B .

Essa si calcola come differenza tra l'area del triangolo ABP e l'area della regione di piano delimitata dalla curva γ con l'asse x :

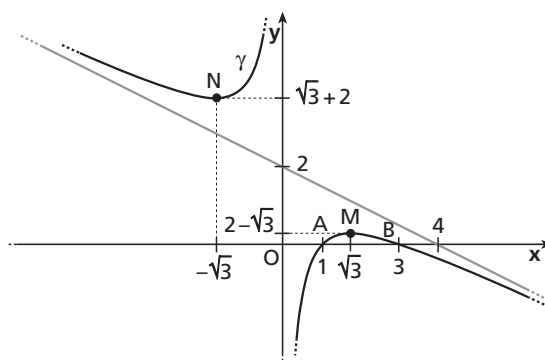
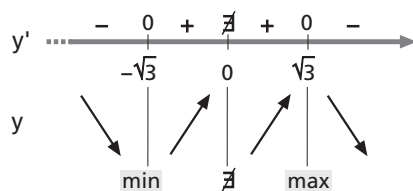
$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \int_1^3 \frac{-x^2 + 4x - 3}{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} + \int_1^3 \left(\frac{x}{2} - 2 + \frac{3}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} + \left[\frac{x^2}{4} - 2x + \frac{3}{2} \ln x \right]_1^3 = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{9}{4} - 6 + \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{4} + 2 = \frac{3}{2} (\ln 3 - 1). \end{aligned}$$

L'area Ω cercata vale $\frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$.

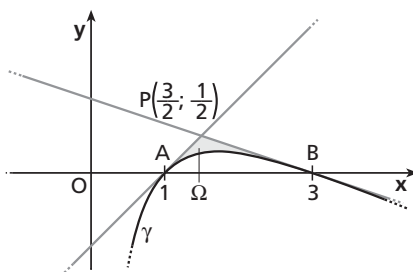


▲ Figura 2.

▼ Figura 3.



▲ Figura 4.



▲ Figura 5.

4. Posto $g(x) = \frac{1}{x}$, si osserva che $\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3$. Possiamo calcolare un valore approssimato di $\ln 3$ appli-

cando il metodo dei trapezi all'integrale $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$.

Dividiamo l'intervallo $[1; 3]$ in $n = 4$ parti uguali di ampiezza $h = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ e applichiamo il metodo di analisi numerica suddetto.

Costruiamo la seguente tabella.

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$g(x) = \frac{1}{x}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

Risulta:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx \approx h \left[\frac{g(1) + g(3)}{2} + g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{1}{3}}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) = \frac{67}{60} = 1,1166...$$

L'errore commesso è maggiorato da $\varepsilon_4 = \frac{(3-1)^3}{12 \cdot 4^2} \cdot m$, con m valore massimo di $|g''(x)|$ in $[1; 3]$ ovvero:

$$g''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow m = 2,$$

$$\varepsilon_4 = \frac{(3-1)^3}{12 \cdot 4^2} \cdot 2 = \frac{1}{12} \approx 0,08.$$

Pertanto risulta $\ln 3 \approx 1,1$.